Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – analyse

Mercredi 18 mai 2016 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[60 points]**.

2216 – 7222

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 17]

La fonction f est définie par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) En trouvant un nombre approprié de dérivées de f, déterminez la série de Maclaurin pour $f(x)$ jusqu'au terme contenant x^3. [7]

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, déterminez la valeur exacte de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x - x - x^2}{x^3}$. [3]

(c) La série de Maclaurin sera utilisée pour trouver une valeur approchée de $f(0{,}5)$.

(i) Utilisez le reste de Lagrange pour trouver une borne supérieure pour la valeur absolue de l'erreur dans cette approximation.

(ii) À partir du reste de Lagrange, déduisez si l'approximation sera supérieure ou inférieure à la valeur réelle de $f(0{,}5)$. [7]

2. [Note maximale : 7]

Une fonction f est donnée par $f(x) = \int_0^x \ln(2 + \sin t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Écrivez $f'(x)$. [1]

(b) En dérivant $f\left(x^2\right)$, obtenez une expression pour la dérivée de $\int_0^{x^2} \ln(2 + \sin t)\,\mathrm{d}t$ par rapport à x. [3]

(c) À partir de là, obtenez une expression pour la dérivée de $\int_x^{x^2} \ln(2 + \sin t)\,\mathrm{d}t$ par rapport à x. [3]

3. [Note maximale : 9]

(a) Étant donné que $f(x) = \ln x$, utilisez le théorème de la moyenne pour montrer que, pour $0 < a < b$, $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$. [7]

(b) À partir de là, montrez que $\ln(1{,}2)$ se situe entre $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$, où m, n sont des entiers positifs consécutifs à déterminer. [2]

4. [Note maximale : 13]

Considérez l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y} - xy$, où $y > 0$ et $y = 2$ lorsque $x = 0$.

(a) Montrez que la substitution $z = y^2$ transforme l'équation différentielle en $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 2xz = 2x$. [4]

(b) En résolvant l'équation différentielle en z, obtenez une expression pour y en fonction de x. [9]

5. [Note maximale : 14]

Considérez la série infinie $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Expliquez pourquoi la série est alternée. [1]

(b) (i) Utilisez la substitution $T = t - \pi$ dans l'expression pour u_{n+1} pour montrer que $|u_{n+1}| < |u_n|$.

(ii) Montrez que la série est convergente. [9]

(c) Montrez que $S < 1{,}65$. [4]